상태 공간 행렬의 대각화를 위한 변환 행렬 P 구하기

주어진 행렬 A와 고유값 λ는 다음과 같습니다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

행렬 A를 대각화하기 위한 변환 행렬 P는 고유벡터들을 열벡터로 가지는 행렬입니다. 행렬 A가 가제어 표준형(Companion Form)이므로, 각 고유값에 대응하는 고유벡터 $\mathbf{v}_i$는 $\begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 \end{bmatrix}^T$ 형태를 갖습니다.

1. 고유벡터 계산

- $\lambda_1 = -1$에 대한 고유벡터 $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_2 = -2$에 대한 고유벡터 $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ (-2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\lambda_3 = -3$에 대한 고유벡터 $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ (-3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2. 변환 행렬 P 정의

위의 고유벡터들을 순서대로 나열하여 변환 행렬 P를 구성합니다.

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3. 결과 확인

이 변환 행렬 P를 이용하면 $P^{-1}AP = D$ (대각 행렬) 관계가 성립합니다.

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$