jeong-hyeonmin.github.io

State Space Design 3~4

Hyeon min

1~2분

Block Diagrams and Canonical Forms

전달함수 $G(s)$ 를 상태공간에 표현하는 방법에는 크게 두가지 방법이 있다.

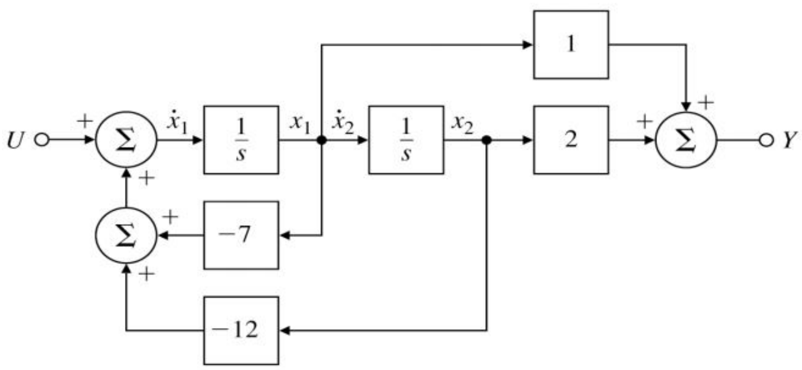
- Control canonical form
- Modal canonical form

다음 예제를 가지고 두가지 방법을 알아보도록 하자.

$G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$

Control canonical form

block diagram을 그리면 다음과 같다.



block diagram을 그리기 위해서는 $G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{\xi(s)}{U(s)}\frac{Y(s)}{\xi(s)}$ 로 생각하고 먼저 $\frac{\xi(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+7s+12}$ 을 먼저 그린다.

여기서는 x2 신호가 ξ 가 되고 x1신호가 $S\xi(s)$ 가 되어서 분자부분을 구현할 수 있다.

상태공간으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = -7x_1 - 12x_2 + u \qquad \dot{x} = A_c x + B_c u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 \qquad y = C_c x$$
$$y = x_1 + 2x_2$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ D_c = 0 \quad \left(G(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c \right)$$

이때 system matrix, Ac의 행을 보면 -7과 -12가 전달함수의 분모에 부호만 바뀌어 있는 것을 확인 할 수 있다.

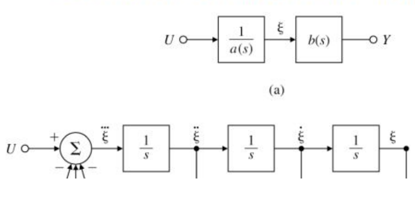
또한 output matrix, Cc를 보면 전달함수의 분모에 있는것을 알 수 있다. $G(s)$는 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{x} = A_c x + B_c u$$
$$\dot{x} \xrightarrow{L} sX(s) - \cancel{x(0)} = A_c X(s) + B_c U(s)$$
$$(sI - A_c)X(s) = B_c U(s)$$
$$X(s) = (sI - A_c)^{-1} B_c U(s)$$

$$Y(s) = C_c X(s) + D_c U$$
$$Y(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c U(s) + D_c U$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c + D_c$$

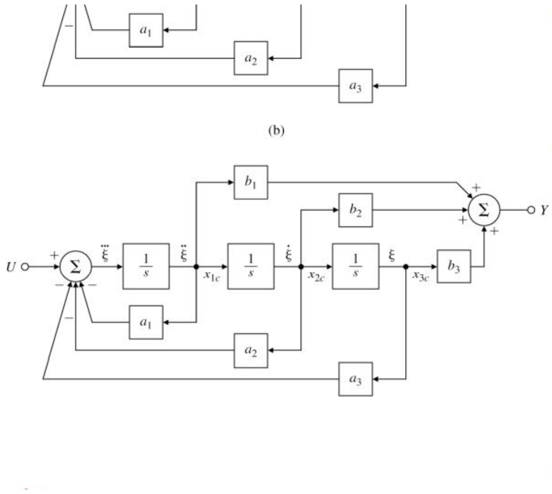
3차식에서는 다음과 같다.

• Control canonical form $\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$\frac{\xi(s)}{\cdots} = \frac{1}{\cdots} \quad \left(\xi = \frac{U(s)}{\cdots} :\ \text{partial state} \right)$$



$$U(s) \quad a(s) \quad a(s)$$

$$\rightarrow \dddot{\xi} = -a_1\ddot{\xi} - a_2\dot{\xi} - a_3\xi + u$$

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) = b(s)\xi(s)$$

$$\rightarrow y = b_1\ddot{\xi} + b_2\dot{\xi} + b_3\xi$$

$$x_1 = \ddot{\xi}_1,\ x_2 = \dot{\xi},\ x_3 = \xi$$

$$\dot{x}_1 = \dddot{\xi} = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = x_2, \quad y = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$$

일반적인 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\rightarrow \dot{x} = A_c x + B_c u, \quad y = C_c x$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ C_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix},\ D_c = 0$$

$$\text{Generally, } G = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \ldots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} \ldots + a_n} = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}, \qquad D_c = 0$$

전달함수의 분자와 분모의 값들이 Ac, Cc에 나타난다.

Modal canonical form

- Modal canonical form of $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2+7s+12}$

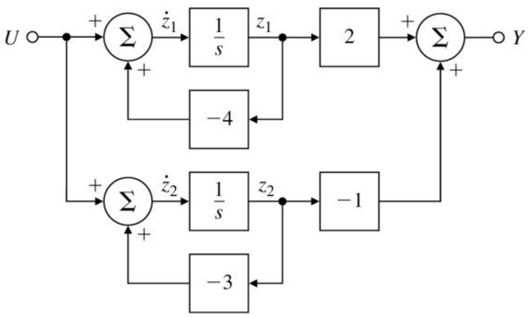
- we can write $G(s) = \dfrac{2}{s+4} + \dfrac{-1}{s+3}$

$$Y(s) = \frac{2}{s+4}U(s) + \frac{-1}{s+3}U(s)$$

$$= 2Z_1(s) - Z_2(s)$$

$$Z_1(s) = \frac{1}{s+4}U(s)$$

$$\rightarrow \dot{z}_1 = -4z_1 + u$$



$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s) \qquad \dot{z} = A_m z + B_m u = \begin{bmatrix} & \\ 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\rightarrow \dot{z}_2 = -3z_2 + u \qquad y = C_m z + D_m u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} z + 0u$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix},\ D_m = 0$$

이때 system matrix의 값 -4,-3은 pole과 관련있다는 것을 알 수 있다. modal canonical form 은 pole을 가지고 표현한다고 생각가능하다.

Transform

$$\begin{matrix} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Ju \end{matrix} \quad \overset{x = Tz}{\underset{z = T^{-1}x}{\Longleftrightarrow}} \quad \begin{matrix} \dot{z} = Az + Bu, \\ y = Cz + Du \\ A = T^{-1}FT,\ B = T^{-1}G,\ C = HT,\ D = J \end{matrix}$$

$\dot{x} = T\dot{z} = T[AZ + Bu] = TAT^{-1} + TBu$

Transformation into control canonical form

$$A = T^{-1}FT \rightarrow AT^{-1} = T^{-1}F \qquad T^{-1}G = B$$

$$t_i :\ i\text{th row of } T^{-1},\ T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

For $n = 3$ (A in control canonical form),

(We just use the structure of canonical form)

$$\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1F \\ t_2F \\ t_3F \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} t_1G \\ t_2G \\ t_3G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a_i's are assume to be unknowns $\rightarrow$ 12 eqns, 12 unknowns

$$\rightarrow \begin{cases} t_2 = t_3F \\ t_1 = t_2F = t_3F^2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t_3G = 0 \\ \rightarrow t_2G = t_3FG = 0 \\ t_1G = t_3F^2G = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow t_3[G \;\; FG \;\; F^2G] = [0\ 0\ 1]$$

$A = T^{-1}FT$ 를 $AT^{-1} = T^{-1}F$ 처럼 사용하는 이유는 T^{-1}에 대해서만 생각하기위해 다음과 같이 사용한다.