베르누이 방정식의 에너지 관점 유도 (압력에 의한 포텐셜 에너지 포함)

작성자: 산업계측제어기술사 분석가

May 3, 2026

Abstract

본 문서는 비압축성 · 비점성(마찰 무시) · 정상 흐름 가정 하에서 베르누이 방정식을 *에너지 관점*으로 단계별 유도한다. 특히 압력에 의한 포텐셜 에너지를 단위 질량당 및 수두(head)로 변환하는 과정을 상세히 설명하고, 최종적으로 단위 질량당 형태와 수두 형태의 베르누이 방정식을 제시한다. 간단한 수치 예제도 포함한다.

1 전제 및 기호

- 흐름: **정상(steady)**이며 **비압축성(incompressible)**, **비점성(inviscid)**을 가정한다.
- 고려 대상: 한 유선(streamline)을 따라 움직이는 유체 입자(질량 요소).
- 기호:

기호	의미	SI 단위
p	정압 (static pressure)	Pa
ρ	유체 밀도	$\mathrm{kg/m^3}$
v	선형 속도	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
z	기준면으로부터의 높이 (elevation)	m
g	중력가속도	$\mathrm{m/s^2}$
W	일 (work)	J
E	에너지	J

2 에너지 관점의 출발

유체 입자(질량 m)가 유선상에서 위치 1에서 위치 2로 이동할 때, 외부가 입자에 한 일은 입자의 에너지 변화(운동에너지 및 위치에너지 변화)와 같다. 이를 단위 질량당(즉 $\mathrm{J\,kg^{-1}}$)로 정리하면 항목별 비교가 쉬워진다.

2.1 위치에너지(단위 질량당)

질량 m인 물체의 위치에너지는

$$E_{\mathrm{pot}} = mgz.$$

따라서 *단위 질량당* 위치에너지는

$$\frac{E_{\mathrm{pot}}}{m} = gz \quad \left[\mathrm{J\,kg^{-1}}\right].$$

2.2 운동에너지(단위 질량당)

운동에너지는

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}mv^2,$$

따라서 단위 질량당 운동에너지는

$$\frac{E_{\mathrm{kin}}}{m} = \frac{v^2}{2} \quad \left[\mathrm{J\,kg^{-1}}\right].$$

2.3 압력에 의한 에너지(단위 질량당)

압력 p는 단위 면적당 힘이며, 체적 V에 대해 압력으로 할 수 있는 일(에너지)은

$$W = p\,V \quad [\mathrm{J}].$$

이 체적의 질량은 $m = \rho V$이므로, *단위 질량당* 압력에너지는

$$\frac{W}{m} = \frac{pV}{\rho V} = \frac{p}{\rho} \quad \left[\mathrm{J\,kg^{-1}}\right].$$

따라서 압력은 단위 질량당 에너지 항으로 $\dfrac{p}{\rho}$로 표현된다.

수두(head)로의 환산 위치에너지 단위 질량당은 gz 형태이므로, 압력에너지를 높이(미터)로 환산하려면 중력가속도 g로 나눈다:

$$h_p \equiv \frac{p}{\rho g} \quad [\mathrm{m}].$$

h_p는 *압력수두(pressure head)*로 불리며, "압력 p가 유체를 몇 미터 높이까지 들어올릴 수 있는가"를 나타낸다.

3 베르누이 방정식 유도 (단위 질량당 형태)

유선상의 두 점 1과 2를 생각하자. 단위 질량당 관점에서 1에서 2로 이동할 때의 에너지 균형을 세운다.

3.1 압력에 의한 일

단위 질량당으로 보면, 점 1에서 점 2로 이동할 때 입자가 받는(또는 잃는) 압력에 의한 일은

$$\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}.$$

(앞쪽과 뒤쪽의 압력 차가 입자에 일을 한다.)

3.2 에너지 보존식

단위 질량당으로 에너지 보존을 쓰면,

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}}_{\text{압력에 의한 일}} + \underbrace{gz_1 - gz_2}_{\text{위치에너지 변화}} = \underbrace{\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}}_{\text{운동에너지 변화}}.$$

이를 정리하면

$$\frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{v_2^2}{2}.$$

따라서 유선상 임의의 점에 대해

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constant along a streamline}}$$

가 성립한다. 이 식은 *단위 질량당 에너지 보존식*이며, 베르누이 방정식의 기본 형태이다.

4 수두(head) 형태

위 식을 g로 나누면 수두 표현이 된다:

$$\boxed{z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{constant}}$$

각 항의 물리적 의미:

- z: 위치수두 (elevation head) [m]
- $\frac{p}{\rho g}$: 압력수두 (pressure head) [m]
- $\frac{v^2}{2g}$: 속도수두 (velocity head) [m]

세 항의 합은 단위 질량당 전체 에너지를 중력가속도로 나눈 값(즉 높이로 환산한 값)이며, 마찰이 없으면 유선상에서 일정하다.

5 간단한 수치 예제

5.1 예제 1: 압력수두 계산

물($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$)에서 정압 $p = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$일 때 압력수두는

$$h_p = \frac{p}{\rho g} = \frac{10^5}{1000 \times 9.81} \approx 10.2\,\mathrm{m}.$$

해석: 이 압력은 물을 약 $10.2\,\mathrm{m}$ 높이까지 들어올릴 수 있는 에너지와 동등하다.

5.2 예제 2: 베르누이 적용(단순)

관로의 단면 1과 2에서 다음 값이 주어진다:

$$p_1 = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}, \quad v_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad z_1 = 0\,\mathrm{m},$$
$$p_2 = 1.5 \times 10^5\,\mathrm{Pa}, \quad v_2 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad z_2 = 2\,\mathrm{m},$$

물의 밀도 $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$라 할 때, 단위 질량당 에너지(좌변)를 계산하여 양변이 일치하는지 확인한다:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{2 \times 10^5}{1000} + \frac{1^2}{2} + 9.81 \times 0$$
$$= 200 + 0.5 = 200.5\,\mathrm{J\,kg^{-1}},$$

$$6pt]\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 = \frac{1.5 \times 10^5}{1000} + \frac{3^2}{2} + 9.81 \times 2$$

$= 150 + 4.5 + 19.62 = 174.12\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$.

위 값이 일치하지 않으므로(차이 $\approx 26.38\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$), 이는 주어진 값들 사이에 에너지 손실(예: 마찰 손실) 또는 외부 일(펌프 · 터빈)이 존재함을 의미한다. 손실이 없다는 가정 하에서는 좌변과 우변이 같아야 한다.

6 확장: 마찰(손실) 또는 외부 일 포함

현실에서는 점성에 의한 손실이나 펌프 · 터빈에 의한 외부 일이 존재한다. 일반화된 에너지 방정식(단위 질량당) 형태는 다음과 같다:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + w_{\mathrm{in}} - w_{\mathrm{out}} - h_L = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2,$$

여기서

- w_{in} : 단위 질량당 공급된 일(예: 펌프),
- w_{out} : 단위 질량당 추출된 일(예: 터빈),
- h_L : 단위 질량당 손실(마찰 손실) 항.

수두 형태로 쓰면 각 항을 g로 나누어 표현할 수 있다.

7 요약

- 압력 p는 단위 체적당 에너지이며, 단위 질량당으로 바꾸면 $\frac{p}{\rho}$가 된다.
- 위치에너지(단위 질량당)는 gz, 운동에너지는 $\frac{v^2}{2}$이다.
- 비압축성 · 비점성 · 정상 흐름 가정 하에서 유선상에서

  $$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constant}$$

  가 성립하며, 이를 g로 나누면 수두 형태

  $$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{constant}$$

  로 표현된다.

참고

베르누이 방정식은 이상 유체(비점성 · 비압축성)와 정상 흐름을 가정한 근사식이다. 실제 공정에서는 점성 · 압축성 · 비정상성 등을 고려하여 확장된 에너지 방정식(손실항 및 외부 일 포함)을 사용해야 한다.