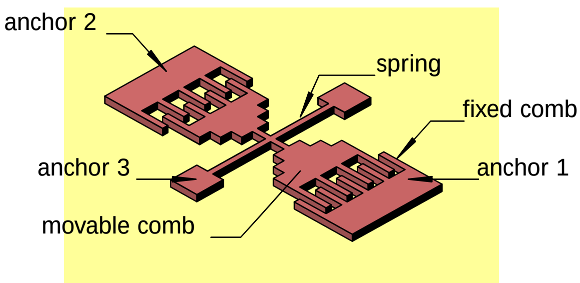
Lecture 18

Comb Actuator Design : Electrostatic Forces and Transfer Function

- Comb Actuator
- Electrostatic Energy and Coenergy
- Generalized Capacitance
- Current between Terminals
- Electrostatic Forces
- Force Harmonic Motion
- Resonant Frequency
- Quality Factor
- Sensing Current
- Static Displacement
- Transfer Function
- Trans-conductance

Comb Actuator



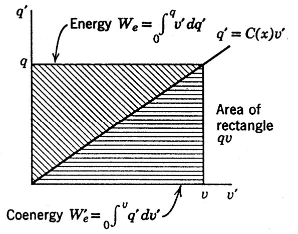
- **anchor 1**과 **anchor 2**에 전압을 인가하고 **anchor 3**을 접지.
- 마주보는 **comb**사이에 인가되는 전압에 의해 **comb** 인력이 발생.
- 이 때 **spring**이 변형하고 복원력이 작용.
- 전류를 측정하면 속도를 측정할 수 있음.

Electrostatic energy W_e and Coenergy W_e'

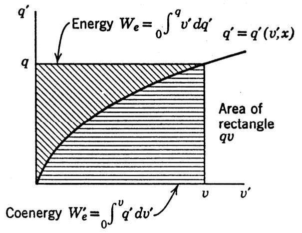
- 캐패시턴스가 보전하는 에너지는 정전에너지 W_e 이며 전하의 축적에 의해 생성된다.

$$We = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- 이 식은 $dWe = Vdq$ 을 적분해서 얻어진다.
- 또한 **Coenergy** $We' = \frac{1}{2}CV^2$ 에 의해서 구할 수 있다.



전기적으로 선형인 시스템



전기적으로 비선형인 시스템

Generalized Capacitance

- $C = \frac{Q}{V}$

즉, 두 도전 물체 사이에 전압 **V**를 인가하고 전하 **Q**가 축적되면 두 물체 간의 정전용량은 **C**이다.

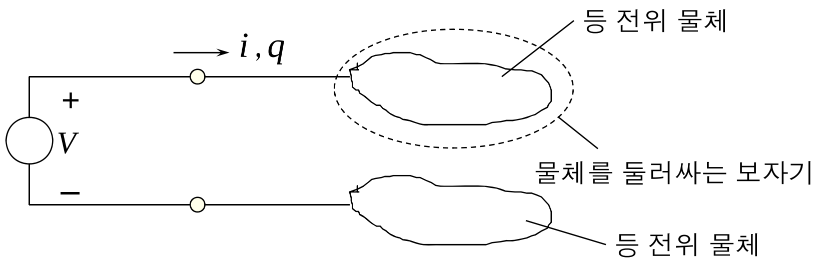
- 정전용량은 유전상수와 두 도전 물체 사이의 거리 등 형상에 의해 정해지는 값이다. 또한, 전압과는 무관하다.

$$C = C(x)$$

- $Q(x,v) = C(x)V$

- $$We = \int_0^Q \frac{q}{C(x)}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$
$$We' = \int_0^V C(x)\cdot v dv = \frac{1}{2}CV^2$$

Current between Terminals



물체를 둘러싸는 보자기를 통해 들어오는 전류는 단자를 통해 흘러 들어가는 전류와 같다.

그런데, 전하 보존의 법칙에 따라 보자기를 통해서 나가는 전류는 보자기안의 전하의 시간적인 변화율과 같아야 한다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{n} + \frac{dq}{dt} = 0$$

따라서,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\oint_s \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{n}$$

여기서, 전하는 공간과 전압의 함수이다.

$$q = q(x, v)$$

전류는 **Chain rule** 에 따라 구할 수 있다.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

만약 $q = C(x)v$ 이면

$$i = C(x)\frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

제**1**항 **:** 회로이론에서 배운 캐패시터의 전류,

제**2**항 **:** 속도전류

Electrostatic Forces

- $f^e = \frac{\partial We'}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial C(x)}{\partial x} v^2$

  이 때 v 는 일정.

- 따라서, 정전용량의 함수 꼴에 따라서 정전력이 결정된다.

- 마주보는 평판의 경우 : $C(x) = \frac{\varepsilon A}{x}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\varepsilon A}{x^2}$

- Comb의 경우 : $C(x) = \frac{\varepsilon h x}{g} \times 2, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{2\varepsilon h}{g}$

Forced Harmonic Motion

- 외력 F_{ext} , 복원력 $-kx$, 점성력 $-c\dot{x}$ 이 가해지면 물체에 가해지는 힘을 알 수 있다.

$$F_{ext} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext}$

- 만약 $F_{ext} = F_0 \cos \omega t$ 이면, 복소함수꼴로 풀 수 있다.

  즉, $F_{ext} = Re(F_0 e^{j\omega t})$

- 또한 $x = Re(\hat{x} e^{j\omega t})$ 로 둘 수 있다.

  $\hat{x}$: 복소수

Amplitude

$$-m\omega^2\hat{x} + j\omega c\hat{x} + k\hat{x} = F_0$$

$$\hat{x} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + j\omega c}$$

$$|\hat{x}(\omega)| = \frac{F_0}{\left\{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2\right\}^{1/2}}$$

여기서, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $\gamma = c/2m$

$$|\hat{x}(\omega)| = \frac{F_0/m}{\left\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right\}^{1/2}} = \frac{F_0/m}{D(\omega)}$$

여기서, $D(\omega) = \left\{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right\}^{1/2}$

Resonant Frequency

$$D(\omega) = \left\{\omega^4 + (-2\omega_0^2 + 4\gamma^2)\omega^2 + \omega_0^4\right\}^{1/2}$$

$$= \left\{(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2)^2 + \omega_0^4 - (-\omega_0^2 + 2\gamma^2)^2\right\}^{1/2}$$

$$\omega = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$$

이때 $D(\omega)$ 가 최소, **Amplitude**가 최대.

ω_r **: Resonant frequency**

$$|\hat{x}(\omega)|_{\max} = \frac{F_0/m}{2\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}} = \frac{F_0}{c\omega_d}$$

여기서, $\gamma = \dfrac{c}{2m}$, $\omega_d{}^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

Sharpness of the Resonance

- **Weak damping** $\gamma << \omega_0$

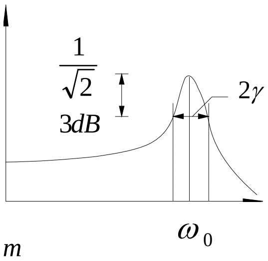
- $|\hat{x}|_{max} = x_{max} = \dfrac{F_0/m}{2\gamma(\omega_0^2-\gamma^2)^{1/2}} \cong \dfrac{F_0}{2\gamma m\omega_0}$

$$\omega_0^2-\omega^2 = (\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega) \cong 2\omega_0(\omega_0-\omega)$$

$$\gamma\omega \cong \gamma\omega_0$$

$$|\hat{x}(\omega)| = \frac{F_0/m}{\left\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right\}^{1/2}} = \frac{F_0/m}{\left\{(2\omega_0)^2(\omega_0-\omega)^2+4\gamma^2\omega_0^2\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{F_0/m}{2\omega_0\left\{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2\right\}^{1/2}} = \frac{x_{max}\cdot\gamma}{\left((\omega_0-\omega)^2+\gamma^2\right)^{1/2}}$$



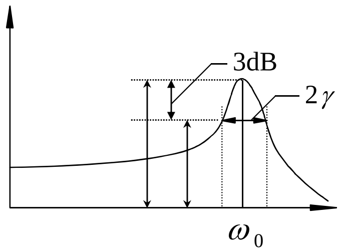
- **When** $\omega = \omega_0 \pm \gamma$, $then$ $x^2 = \frac{1}{2}x_{max}^2$
- 즉, 2γ가 공진시의 에너지가 $\frac{1}{2}$이 되는 점들의 폭이 된다.

Quality Factor

for weak damping

$$Q \equiv \frac{\omega_d}{2\gamma}$$

따라서 $Q \cong \dfrac{\omega_0}{2\gamma}$



$$\Delta\omega = 2\gamma \cong \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \cong \frac{1}{Q}$$

Electrostatic Comb Drive

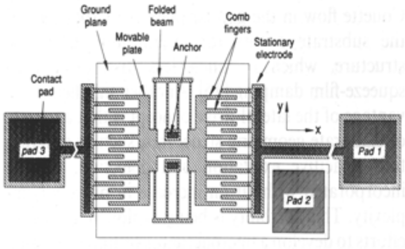


Fig. 1. Layout of a linear resonant plate.

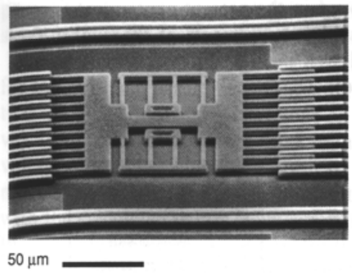


Fig. 5. SEM of a linear resonant plate.

- 양쪽의 **Comb**으로 **Push-pull** 구동을 하거나
- 한쪽의 **Comb**으로 구동을**,** 다른 쪽 **Comb**으로 감지를 할 수 있다**.**

(Ref.[8])

Sensing Current

- 감지부에 감지 전류 ***i**s*가 흐른다**.**

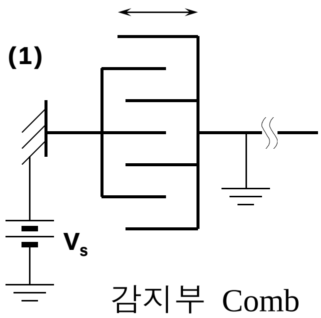
$$i_s = V_s \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \quad \text{........ (1)}$$

- $i = C(x)\dfrac{dv}{dt} + V\dfrac{dC(x)}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$

여기서 ***v=V**s* **(**직류**)** 이면

$$i_s = V_s\left(\frac{dC(x)}{dx}\right)\frac{dx}{dt}$$

comb의 경우**,** $\dfrac{dC(x)}{dx} = \varepsilon_0 \dfrac{h}{g} N, \quad x$ 에 무관**.**



Static Displacement

Motion Equation $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f^{e}$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)v_D^{\ 2}$$

$x=X_s+x_a$, X_s : Stable point, x_a : Small signal output

$v_D=V_P+v_d\cos\omega t$, V_P : d.c. bias, v_d : a.c. drive amplitude

$$m\ddot{x}_a+c\dot{x}_a+k(X_s+x_a)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)(V_P^{\ 2}+2V_Pv_d\cos\omega t+v_d^{\ 2}\cos^2\omega t)$$

여기서, $V_P >> v_d$ 이면 $\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P^{\ 2}(1+2\frac{v_d}{V_P}\cos\omega t)$

따라서, $kX_s=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P^{\ 2}$

$$X_s=\frac{1}{2k}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P^{\ 2} \qquad (2)$$

Small Signal Output

$$m\ddot{x}_a+c\dot{x}_a+kx_a=\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d\cos\omega t=\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_de^{j\omega t}\right]$$

$$x_a=\mathrm{Re}\left[\hat{X}_ae^{j\omega t}\right]$$

$$(-m\omega^2+j\omega c+k)\hat{X}_a=\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d$$

$$\hat{X}_a=\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d}{(k-m\omega^2)+j\omega c}=\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d\{(k-m\omega^2)-j\omega c\}}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}$$

$$x_a=\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}\{(k-m\omega^2)\cos\omega t+\omega c\sin\omega t\}$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_Pv_d}{\{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2\}^{1/2}}\cos(\omega t-\varphi)$$

여기서, $\tan\varphi=\frac{\omega c}{k-m\omega^2}$

Transfer Function

$$\left|\frac{x_a(\omega)}{v_d}\right| = \frac{V_P\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)}{\{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2\}^{1/2}}$$

공진시 $\omega=\omega_o$, **weak damping** 시 $Q=\frac{\omega_o}{2\left(c/2m\right)}$

$$\left|\frac{x_a(\omega)}{v_d}\right|_{\omega_o} = \frac{V_P\frac{\partial C}{\partial x}}{\omega_o c} = \frac{V_P\frac{\partial C}{\partial x}}{\omega_o\left(\frac{m\omega_o}{Q}\right)} = \frac{V_P\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)Q}{k} \qquad (4)$$

따라서, 공진시의 변위를 크게 하려면

V_P, $\frac{\partial C}{\partial x}\left(=\frac{\varepsilon_o hN}{g}\right)$, Q 를 크게하고

$k\left(\propto N_S\frac{EI}{L^3}\propto N_S\frac{Eh}{12}\left(\frac{W}{L}\right)^3\right)$ 를 작게 해야 한다.

Trans-conductance

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{-\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P v_d\omega}{\{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2\}^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi)$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\omega_o} = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P v_d\omega_o}{\omega_o c} = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P v_d\omega_o}{\omega_o\left(\frac{m\omega_o}{Q}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)V_P v_d\omega_o Q}{k}$$

그런데 $\left|I_s\right|_{\omega_o} = V_s\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)\left|\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\omega_o}$

$$= \frac{V_s V_P v_d\omega_o Q}{k}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2$$

따라서 $\left|\frac{I_s}{v_d}\right|_{\omega_o} = \omega_o V_s V_P\frac{Q}{k}\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2$ (5)

References

(1) J.R.Melcher, Electromechanical Dynamics Part I, 1968.
(2) 김용권 저, 전기기계역학 강의 노트, 1997.
(3) W.S.Trimmer, Micromechanics and MEMS (Class and Seminal Papers to 1990), Section 3, IEEE Press, 1997.
(4) W.C.Tang et al., Proc. IEEE MEMS, pp.53-59, 1989.
(5) W.C.Tang et al., Proc. Transducers'89, Vol.2, pp.328-331, 1990.
(6) W.C.Tang et al., Technical Digest IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop, pp.23-27, 1990.
(7) C.J.Kim et al., Technical Digest IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop, pp.48-51, 1990.
(8) W.C.Tang et al., Sensors and Actuators, Vol.20, pp.25-32, 1989.
(9) Grant R. Fowles, Analytical Mechanics, Saunders College Publishing, Philadelphia, 1977.
(10) Ronald A. Walsh, Electromechanical Design Handbook, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995.