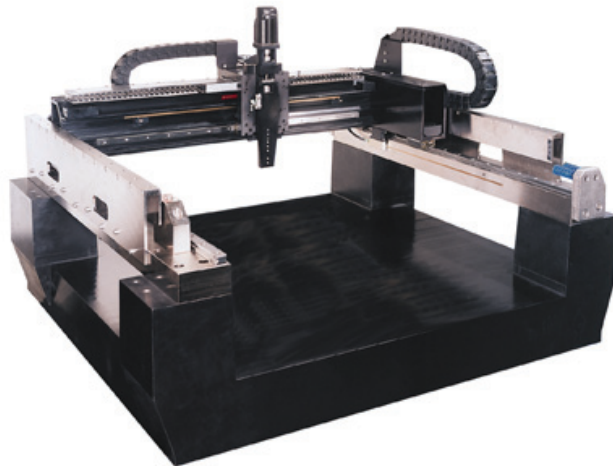


Design of a Motion Profiles – Part C

- 9.1 Design of 5th order Motion Profile
- 9.2 Design of 7th order Motion Profile



9.1 Design of 5th order Motion Profile

앞에서 설명한 사다리꼴 이나 3차 프로파일의 경우 가속도의 변화인 저크jerk를 구해보면 저크 프로파일은 그다지 부드럽지 못하고 시작과 끝 부분도 불연속적인 것을 알 수 있다. 실제로 질량을 가진 물체가 움직일 때 가속도가 높을수록 기구물의 가진excitation량이 커지는데 저크의 특징이 가진량과 상당히 밀접한 관계가 있다.

5차 방정식의 경우, 사다리꼴이나 3차 프로파일과 다르게 두 번째 도함수인 저크 특성이 부드러운 곡선 형태가 되므로 진동을 많이 줄일 수 있다. 하지만 당연히 더 고차함수인 7차 구동 프로파일에 비해서는 진동이 크다. 하지만 고차로 올라갈수록 동일한 거리에 대하여 구동시간이 늘어나므로 5차식의 구동 시간은 7차식 프로파일에 비해 짧다. 이러한 이유로 5차 프로파일은 초고속 서보 시스템에서 어느 정도 진동을 허용하면서 빠르게 구동할 경우의 절충안에 적합하다고 볼 수 있다.

모션 프로파일은 위치, 속도, 가속도, 저크가 한 세트를 이루므로, 도함수의 위치에 따라 차수가 달라지는데, 보통 5차식 프로파일이라고 하면 위치 프로파일이 5차식인 것을 가리킨다. 따라서 앞으로도 본서에서는 이러한 명명법을 기준으로 한다.

5차식의 유도는 3차식의 경우와 거의 유사하며, 다원일차 연립방정식에서 풀어야 할 계수가 2개 늘어나므로 제한조건을 2개 더 고려할 수 있다.

$$y = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5 \quad (9.1)$$

$$\dot{y} = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + 5f \quad (9.2)$$

$$\ddot{y} = 2c + 6dt + 12et^2 + 20ft^3 \quad (9.3)$$

$$\ddot{y} = 6d + 24et + 60ft^2 \quad (9.4)$$

여기서 다음과 같은 제한조건을 고려하면,

$$y(0) = 0, y(1) = 1 \quad (9.5)$$

$$\dot{y}(0) = 0, \dot{y}(1) = 0 \quad (9.6)$$

$$\ddot{y}(0) = 0, \ddot{y}(1) = 0 \quad (9.7)$$

상기의 제한조건을 이용하여 a, b, c, d, e, f 를 풀면 다음과 같다.

$$y = 10t^3 - 15t^4 + 6t^5 \quad (9.8)$$

아래의 수식들은 5차 프로파일을 DSP에 이식하기 쉽도록 일반적인 방법으로 구동거리 S 와 구동시간 T를 도입하여 표현한 식들이며, 각각의 그림은 위치, 속도, 가속도, 저크에 대한 구동 프로파일을 그래프로 나타낸 것이다.

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = \left[10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5\right]S \quad (9.9)$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{30}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{60}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{30}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^4\right]S \quad (9.10)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{60}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right) - \frac{180}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{120}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^3\right]S \quad (9.11)$$

$$\ddot{\dot{y}}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{60}{T^3} - \frac{360}{T^3}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{360}{T^3}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]S \quad (9.12)$$

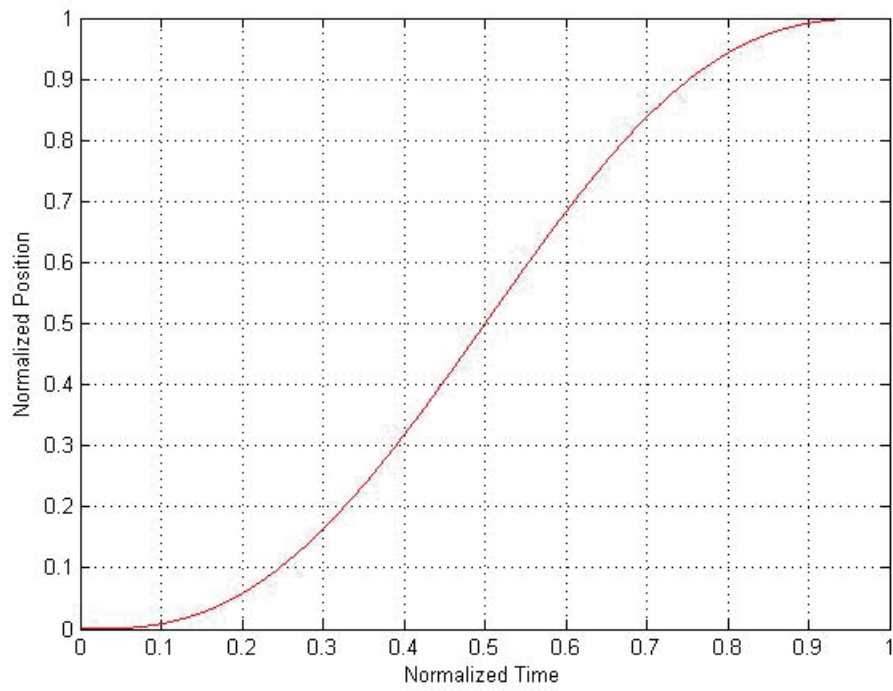


Fig. 9.1 5th order Motion Profile - Position

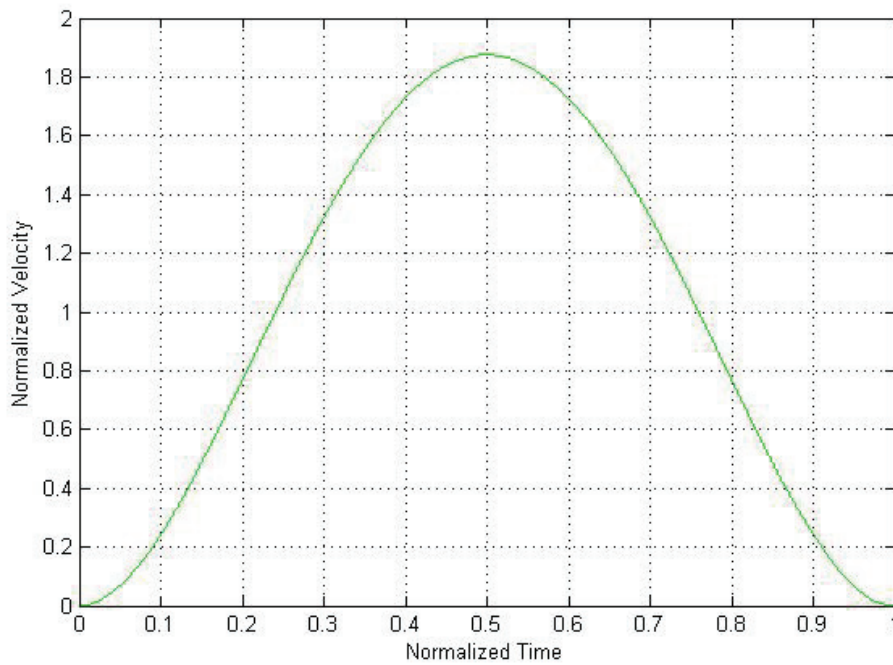


Fig. 9.2 5th order Motion Profile - Velocity

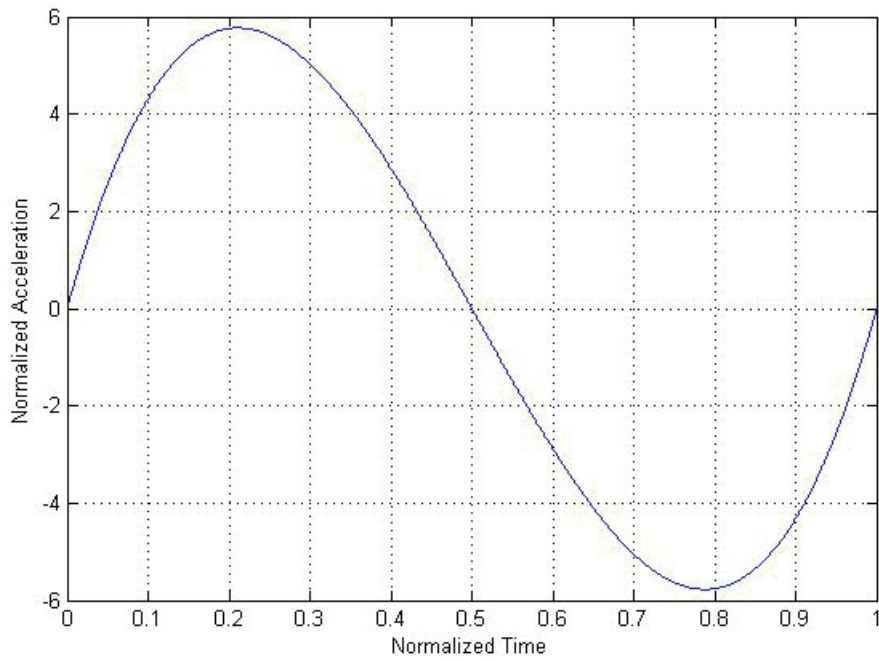


Fig. 9.3 5th order Motion Profile - Acceleration

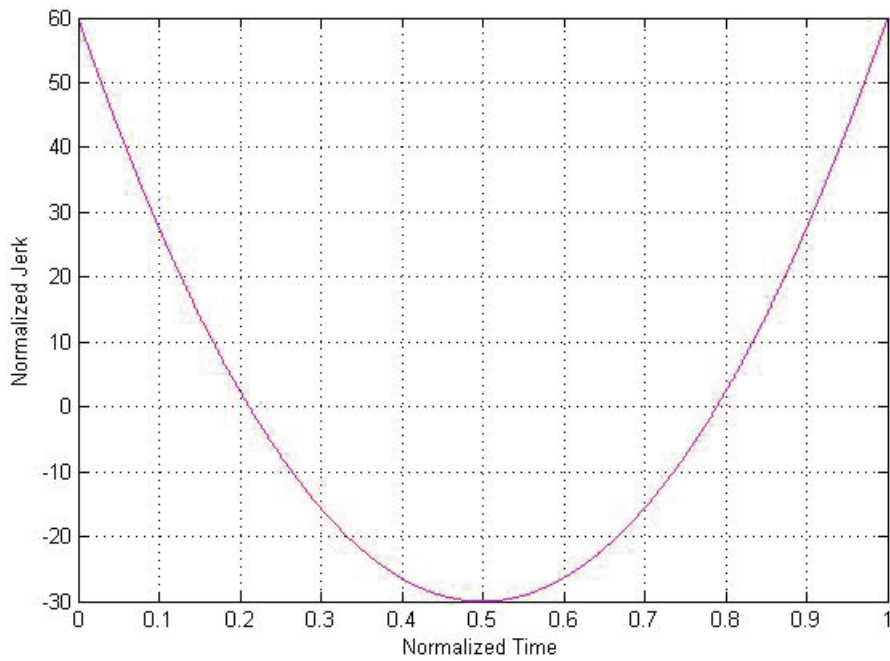


Fig. 9.4 5th order Motion Profile - Jerk

9.2 Design of 7th order Motion Profile

9.1 절에서 소개한 5차의 프로파일은 일반적으로 널리 쓰일 수 있는 좋은 프로파일이지만, 5G 이상의 초고속 서보 등에 사용하기에는 부족하다. 그 이유는 Fig. 9.4에서 볼 수 있듯이, 시작점과 끝점에서의 저크의 변화가 매우 크기 때문이다. 9.1 절의 모션 프로파일은 최대 허용 속도와 가속도의 항 까지만 고려했지만, 다음의 Design Example 2.2에서는 저크(Jerk)항까지 고려하여 좀 더 고성능의 프로파일을 생성해 보자.

Design example 9.1

최대허용 속도, 가속도 및 저크(Jerk)항 까지 고려한 구동 프로파일을 생성하라. 7차 다항식을 이용하고, 최대 속도 1000mm/s, 최대 가속도 30m/s², 최대 저크 3km/s³일 때의 거리에 따른 구동 시간을 도출하라.

<Solution 9.12>

독자 여러분 중 일부는 벌써 경계조건과 다항식의 차수와와의 관계를 파악 하셨을 것이다. 앞 절에서 이용한 3차의 방정식은 미지수가 4개이므로 4개의 경계조건을 반영할 수 있다. 7차의 방정식을 이용한다면 미지수가 8개이므로 도합 8개의 원하는 조건을 방정식에 입력할 수 있는 것이다.

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = \left[a + b\left(\frac{t}{T}\right) + c\left(\frac{t}{T}\right)^2 + d\left(\frac{t}{T}\right)^3 + e\left(\frac{t}{T}\right)^4 + f\left(\frac{t}{T}\right)^5 + g\left(\frac{t}{T}\right)^6 + h\left(\frac{t}{T}\right)^7 \right] S \quad (9.13)$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{b}{T} + \frac{2c}{T}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{3d}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{4e}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{5f}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^4 + \frac{6g}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^5 + \frac{7h}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^6 \right] S \quad (9.14)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{2c}{T}\left(\frac{1}{T}\right) + \frac{6d}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{12e}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{20f}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{30g}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^4 + \frac{42h}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)^5 \right] S \quad (9.15)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{6d}{T^3} + \frac{24e}{T^3} \left(\frac{t}{T}\right) + \frac{60f}{T^3} \left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{120g}{T^3} \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{210}{T^3} \left(\frac{t}{T}\right)^4 \right] S \quad (9.16)$$

여기서 고려해야 할 경계조건은,

$$y(0) = 0, y(1) = 1 \quad (9.17)$$

$$\dot{y}(0) = 0, \dot{y}(1) = 0 \quad (9.18)$$

$$\ddot{y}(0) = 0, \ddot{y}(1) = 0 \quad (9.19)$$

$$\ddot{\ddot{y}}(0) = 0, \ddot{\ddot{y}}(1) = 0 \quad (9.20)$$

이를 만족하는 8개의 미지수를 구해서 정리하면,

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = \left[35\left(\frac{t}{T}\right)^4 - 84\left(\frac{t}{T}\right)^5 + 70\left(\frac{t}{T}\right)^6 - 20\left(\frac{t}{T}\right)^7 \right] S \quad (9.21)$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{140}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^3 - \frac{420}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^4 + \frac{420}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^5 - \frac{140}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^6 \right] S \quad (9.22)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{420}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{1680}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^3 + \frac{2100}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^4 - \frac{840}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^5 \right] S \quad (9.23)$$

$$\ddot{\ddot{y}}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{840}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right) - \frac{5040}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{8400}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^3 - \frac{4200}{T^2} \left(\frac{t}{T}\right)^4 \right] S \quad (9.24)$$

여기서도 3차식 프로파일에서 사용한 최대 속도, 가속도, 저크에 대한 조건을 이용하여

각각의 최소 구동시간을 구하면,

$$T_v = 2.1875 \frac{S}{\dot{y}_{\max}} \quad (9.25)$$

$$T_a = 2.7411 \sqrt{\frac{S}{\ddot{y}_{\max}}} \quad (9.26)$$

$$T_a = \left(\frac{52.5S}{\ddot{\ddot{y}}_{\max}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.27)$$

다음의 Matlab source 9.1과 Fig. 9.5부터 Fig. 9.7까지는 표준화된 7차 방정식의 구동 프로파일을 생성 및 도시한 것이다.

Matlab Source 9.1

```
% 7th order new motion profile generator
% Number of Table cell is 2048
% 2011. HanKim
clear;
i = 0;
for i=1:2048,
    nt = i/2048;
    PTABLE(i) = 35*nt^4 - 84*nt^5 + 70*nt^6 - 20*nt^7;
    VTABLE(i) = 140*nt^3 - 420*nt^4 + 420*nt^5 - 140 * nt^6;
    ATABLE(i) = 420*nt^2 - 1680*nt^3 +2100*nt^4 - 840 * nt^5;
    JTABLE(i) = 840*nt - 5040*nt^2 + 8400*nt^3 - 4200*nt^4;
end
x = ((1/2048):(1/2048):1)';
figure(1);plot(x,PTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized Time');ylabel('Normalized Distance');
figure(2);plot(x,VTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized Time');ylabel('Normalized Velocity');
figure(3);plot(x,ATABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized Time');ylabel('Normalized Acceleration');
figure(4);plot(x,JTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized Time');ylabel('Normalized Jerk');
fid = fopen('ptable.txt','w');
for j=1:512,
    i = j*4-3;
    fprintf(fid,'%13.12f, %13.12f, %13.12f, %13.12f, \n',...
        PTABLE(i),PTABLE(i+1),PTABLE(i+2),PTABLE(i+3));
end
fclose(fid);
```

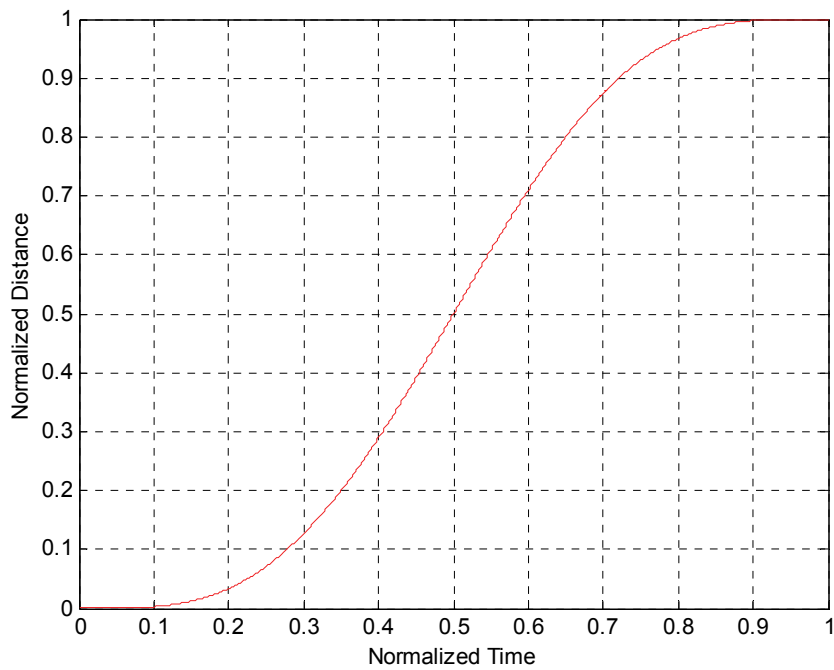



Fig. 9.6 7th order Motion Profile - Position

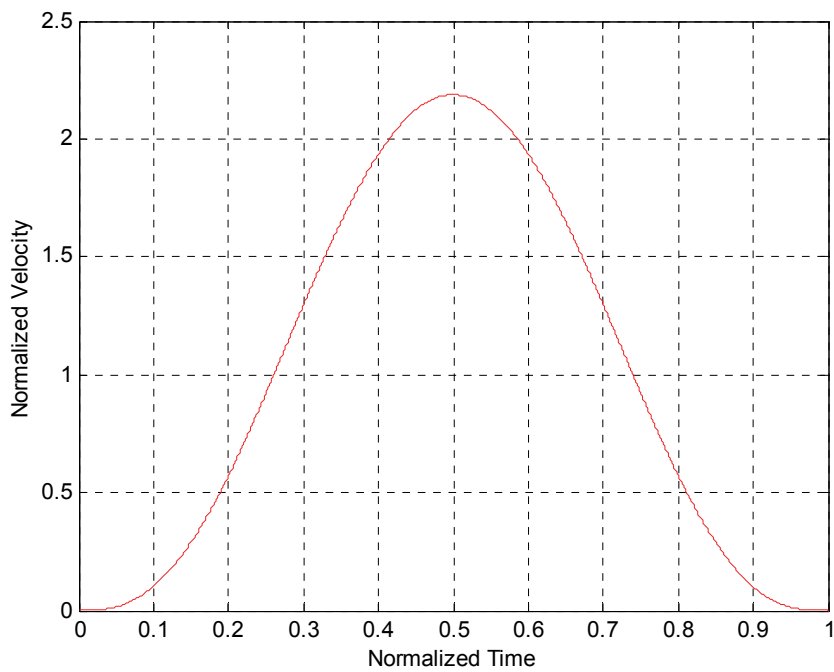


Fig. 9.7 7th order Motion Profile - Velocity

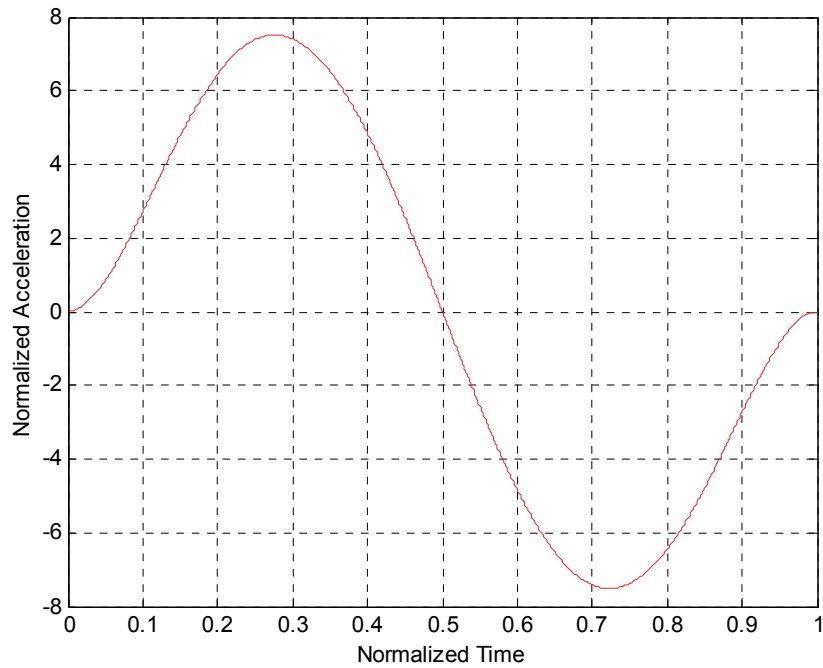


Fig. 9.8 7th order Motion Profile - Acceleration

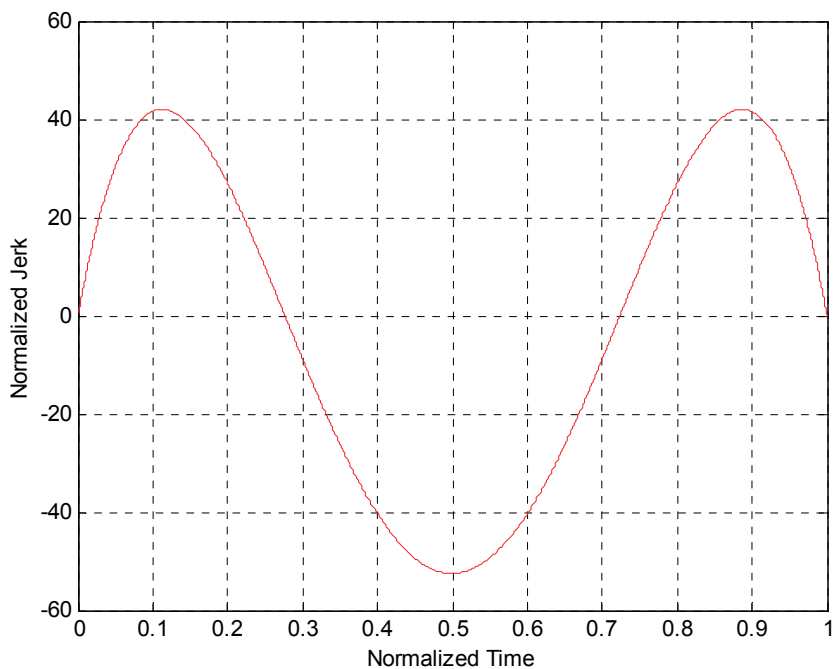


Fig. 9.9 7th order Motion Profile - Jerk

Fig.9.9의 저크 프로파일을 보면, 3차식이나 5차식의 구동 방정식의 경우와는 달리

시작과 끝부분의 저크가 0부터 스무드한 곡선으로 시작, 종료되므로 고속으로 구동시 기구부의 진동을 최소화 할 수 있다. 이상과 같이 소개한 방법을 응용하면 독자 여러분들도 다양한 형태의 구동 프로파일을 만들어 낼 수 있다. 일례를 들면, 만약 구동의 뒷부분의 구동 종료시에만 저크를 0으로 하고 싶으면, 6차 방정식을 이용하여, 원하는 경계조건으로 식을 유도하면 된다.

일반적으로 차수가 올라갈수록 진동이 최소화 되지만, 구동시간이 길어지는 경향이 있다. 하지만 각 시스템이 가지고 있는 최대 속도, 가속도, 저크에 따라 조금씩 또 틀려지므로 서보 시스템 설계자는 기계, 전자적인 구동부를 잘 이해하고 있어야 그 시스템에 잘 맞는 최적의 프로파일을 설계해 낼 수 있다.

거리에 따른 7차식의 구동 시간의 계산과 최대 속도, 가속도, 저크 등의 생성 프로그램은 다음과 같다.

Matlab Source 9.2

```
% 7th order motion time calculator
% Number of Table cell is 2048
% 2011. HanKim
clear;
MA=input('\n\n Enter the maximum acceleration(m/s^2): ');
MV=input('\n\n Enter the maximum velocity(mm/s): ');
MJ=input('\n\n Enter the maximum jerk(km/s^3): ');

index=1;
flag=0;

cstep=100;
final_dist=300000;
```

```

fx=(1:cstep:final_dist)';

for x=1:cstep:final_dist,
    Tv=(2.1875*x)/MV;
    Ta=2.74101959*sqrt(x/MA);
    Tj=(52.5*x/MJ)^(1/3);

    if Tv >= Ta
        flag = 1;
        temp=Tv;
    else
        flag=2;
        temp=Ta;
    end

    if Tj >= temp
        flag = 3;
        TF=Tj;
    else
        TF=temp;
    end

    Svel(index) = 2.1875*x/TF;
    Sacc(index) = 2.74101959^2*x/TF^2;
    Sjerk(index) = 52.5*x/TF^3;

    SVtime(index)=TF;
    index = index + 1;
end

figure(1);plot(fx,SVtime,'b-');
grid on;title('Working Time');
xlabel('distance um');ylabel('time ms');

figure(2);plot(fx,Svel,'b-');
grid on;title('Max Velocity variation with distance');

```

```
xlabel('distance um');ylabel('mm/s');
```

```
figure(3);plot(fx,Sacc,'b-');
grid on;title('Max Acc variation with distance');
xlabel('distance um');ylabel('m/s^2');
```

```
figure(4);plot(fx,Sjerk,'b-');
grid on;title('Max Jerk variation with distance');
xlabel('distance um');ylabel('km/s^3');
```

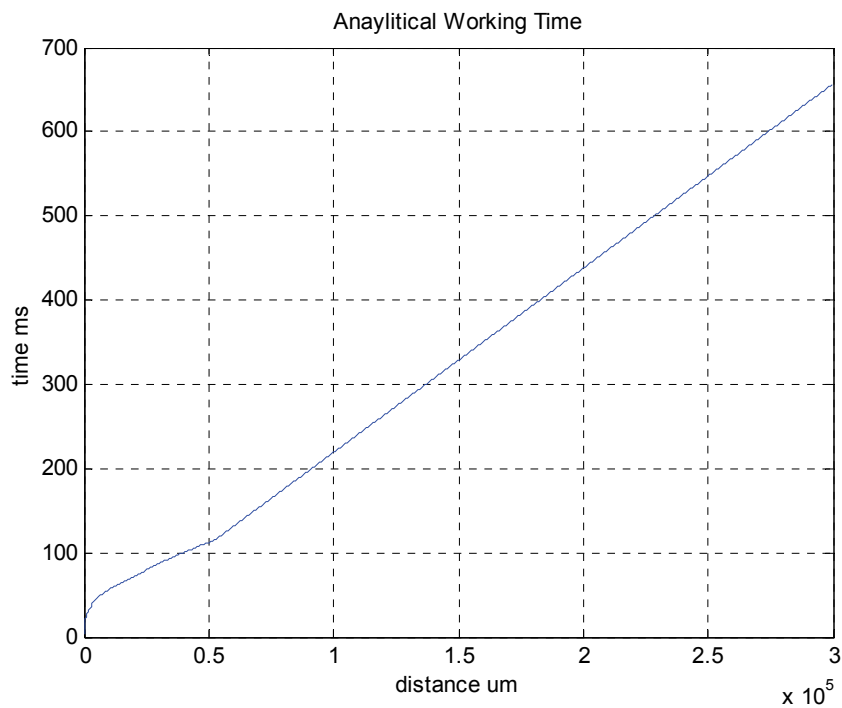


Fig. 9.10 Motion time by 7th order Motion Profile,
($V_{max}=1000\text{mm/s}$, $A_{max}=30\text{m/s}^2$, $J_{max}=3\text{km/s}^3$)

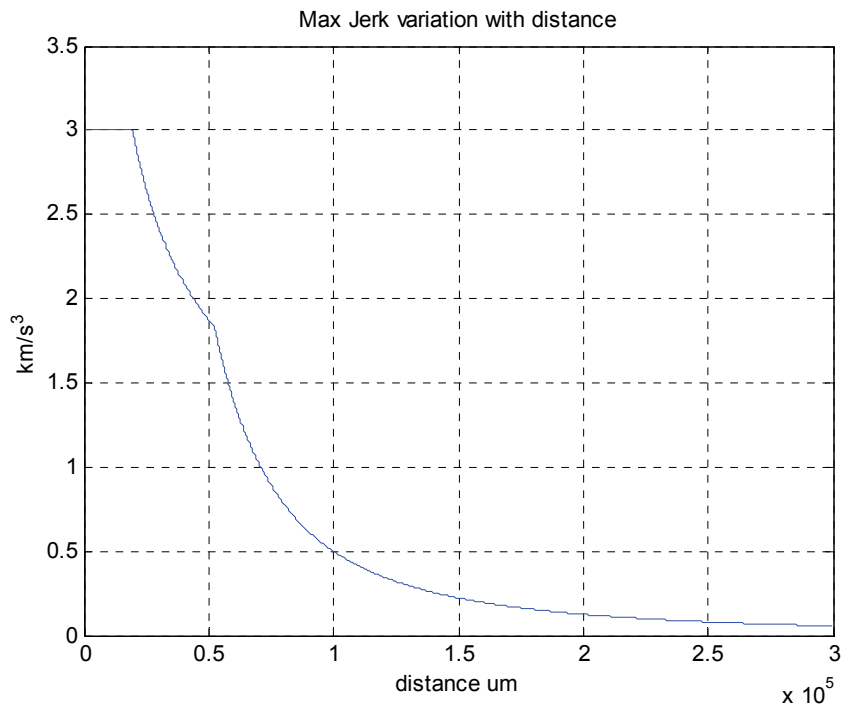


Fig. 9.11 Max Jerk Variation with Motion Distance by 7th order Motion Profile,
($V_{max}=1000\text{mm/s}$, $A_{max}=30\text{m/s}^2$, $J_{max}=3\text{km/s}^3$)

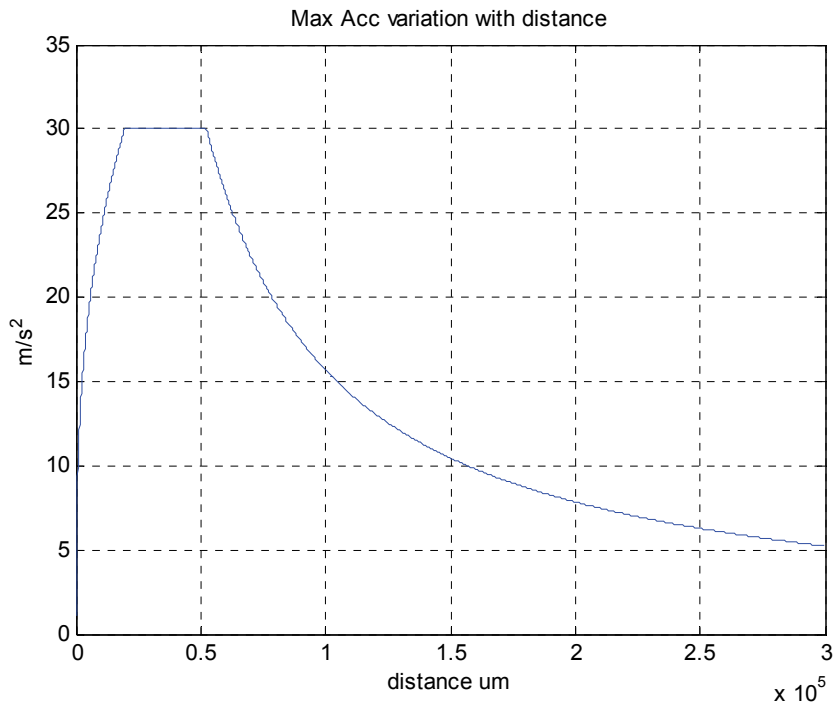


Fig. 9.11 Max Acc. variation with Motion Distance by 7th order Motion Profile,
($V_{max}=1000\text{mm/s}$, $A_{max}=30\text{m/s}^2$, $J_{max}=3\text{km/s}^3$)

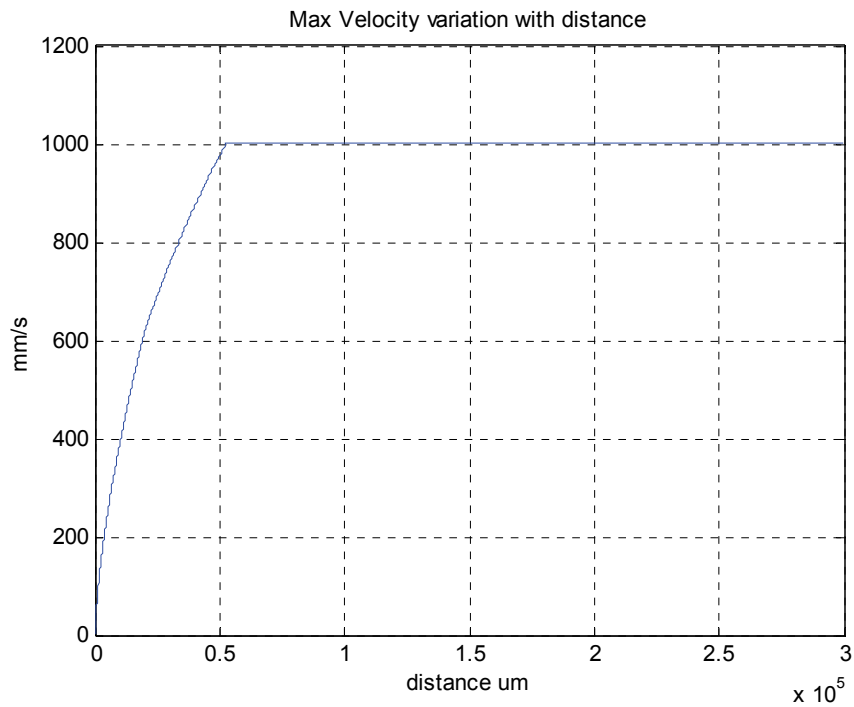


Fig. 9.12 Max Vel. variation with Motion Distance by 7th order Motion Profile,
($V_{\max}=1000\text{mm/s}$, $A_{\max}=30\text{m/s}^2$, $J_{\max}=3\text{km/s}^3$)

본 절에서는 7차식을 이용한 프로파일에 대하여 살펴보았는데, 정리하면 7차식은 매우 부드러운 저크특성을 가지고 있지만 구동시간에서 손해보는 경향이 있으므로 그 절충으로 일반적인 응용분야에서는 5차식의 프로파일이 평균적으로 많이 사용된다. 하지만 초고속 / 초가속도 응용분야에서는 7차식의 프로파일 또한 좋은 효과를 볼 수 있다.

■