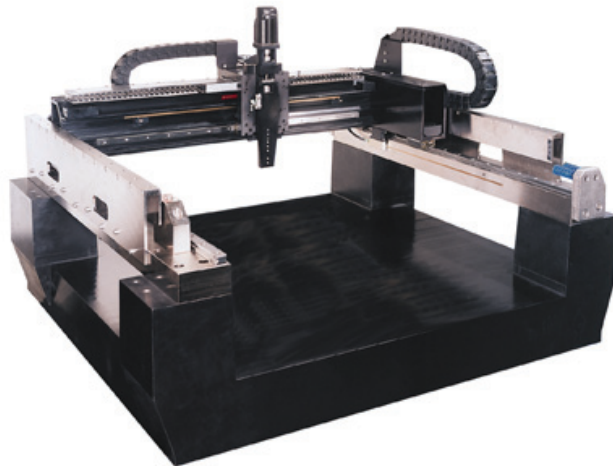


Design of a Motion Profiles – Part D

- 10.1 Design of Sinusoidal Motion Profile
- 10.2 Power Consumptions of Motion Profiles



10.1 Design of Sinusoidal Motion Profile

모션 프로파일에 있어서 저크 특성은 서보의 움직이는 부분의 기구물의 진동과 밀접한 연관이 있다. 저크 특성 자체가 기구적인 관점에서의 충격의 의미가 있기 때문에 급격하게 변하는 저크 특성은 기구구조물에 매우 안 좋은 영향을 미치며, 또한 진동을 유발시킨다. 따라서 고성능의 서보 시스템으로 갈수록 저크 특성의 제어는 기구물의 방진과 제어하고자 하는 대상의 정밀도에 많은 영향을 미친다.

그림 2.17을 살펴보면 저크 곡선의 + 상한 값과 - 하한 값의 크기가 다르므로 기기에서 정의된 최대 저크 값이 - 하한 값에 좌우되는 것을 알 수 있다. 이러한 경우 저크 곡선이 +, - 양방향으로 크기가 같으면 그만큼 충격량을 효율적으로 분산시킬 수 있다는 뜻이기 때문에, 이러한 경우 더 유리하게 저크(Jerk)를 제어할 수 있다.

Design example 2.3

정현파 방정식을 이용하여 최대허용 속도, 가속도 및 저크 항까지 고려한 구동 방정식을 생성하라. 또한 시간에 따른 저크 곡선에서 +와 - 각각의 방향에 대한 최대 저크의 크기가 같게 디자인하라.

<Solution 2.3>

처음에 프로파일의 구조를 디자인하는 것은 다분히 창의적인 발상이 요구된다. 처음에 구조가 맞지 않으면 원하는 경계조건(Boundary condition)을 모두 만족시킬 수 없기 때문이다. 위에서 정의된 저크의 형상이 만족되도록 다음과 같은 저크 방정식을 디자인 해보자.

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad (10.1)$$

저크 방정식이 식(10.1)과 같은 형상을 가지면 +, - 의 최대값 크기가 같고, 포지션 프로파일까지 적분 했을 때 Sin 항term으로 나타나게 되므로, 모션 프로파일의 유도에서 필요한 몇 가지 요건을 갖추고 있음을 알 수 있다. 식(10.1)을 포지션 프로파일이 나올 때 까지 적분을 계속해 보자.

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{Ta}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + b \quad (10.2)$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = -\frac{T^2 a}{4\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + bT\left(\frac{t}{T}\right) + c \quad (10.3)$$

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = -\frac{T^3 a}{8\pi^3} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + bT^2\left(\frac{t}{T}\right)^2 + cT\left(\frac{t}{T}\right) \quad (10.4)$$

다음과 같은 6가지의 경계조건(Boundary Condition)을 고려해보자.

$$y(0) = 0, y(1) = 1, \quad (10.5)$$

$$\dot{y}(0) = 0, \dot{y}(1) = 0, \quad (10.6)$$

$$\ddot{y}(0) = 0, \ddot{y}(1) = 0. \quad (10.7)$$

식(10.2) ~ 식(10.7)로부터,

$$\frac{bT^2}{2} + cT = 1 \quad (10.8)$$

$$-\frac{aT^2}{4\pi^2} + c = 0 \quad (10.9)$$

$$-\frac{aT^2}{4\pi^2} + bT + c = 0 \quad (10.10)$$

식(10.8)~식(10.10)으로부터,

$$a = \frac{4\pi^2}{T^3}, b = 0, c = \frac{1}{T} \quad (10.11)$$

식 (10.1) ~ (10.4)를 다시 정리하면,

$$y\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]S \quad (10.12)$$

$$\dot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]S \quad (10.13)$$

$$\ddot{y}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{2\pi}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)S \quad (10.14)$$

$$\ddot{\ddot{y}}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{4\pi^2}{T^3} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)S \quad (10.15)$$

다음의 Matlab Source 는 Normalize 된 경우의 표준화 프로파일을 생성하는 프로그램이다.

Matlab Source 10.1

```

% SIN motion profile generator
% Number of Table cell is 2048
% 2000. HanKim
clear;
i = 0;
for i=1:2048,
    nt = i/2048;
    PTABLE(i) = nt - sin(2*pi*nt)/(2*pi);
    VTABLE(i) = 1 - cos(2*pi*nt);
    ATABLE(i) = 2*pi*sin(2*pi*nt);
    JTABLE(i) = 4*(pi^2)*cos(2*pi*nt);
end
x = (1/2048:1/2048:1)';
figure(1);plot(x,PTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized time');ylabel('Normalized distance');
```

```

figure(2);plot(x,VTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized time');ylabel('Normalized Velocity');
figure(3);plot(x,JTABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized time');ylabel('Normalized Jerk');
figure(4);plot(x,ATABLE,'r-');grid on;
xlabel('Normalized time');ylabel('Normalized Acceleration');

fid = fopen('ptable.txt','w');
for j=1:512,
    i = j*4-3;
    fprintf(fid,'%13.12f, %13.12f, %13.12f, %13.12f, \n',
        PTABLE(i),PTABLE(i+1),PTABLE(i+2),PTABLE(i+3));
end
fclose(fid);
    
```

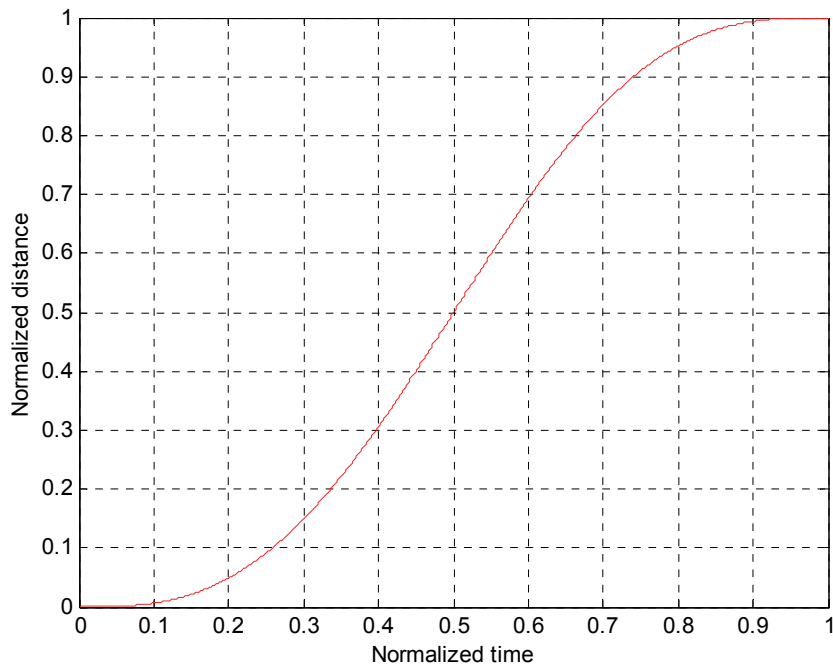


Fig. 10.1 Motion Profile using Sinusoidal function - Position

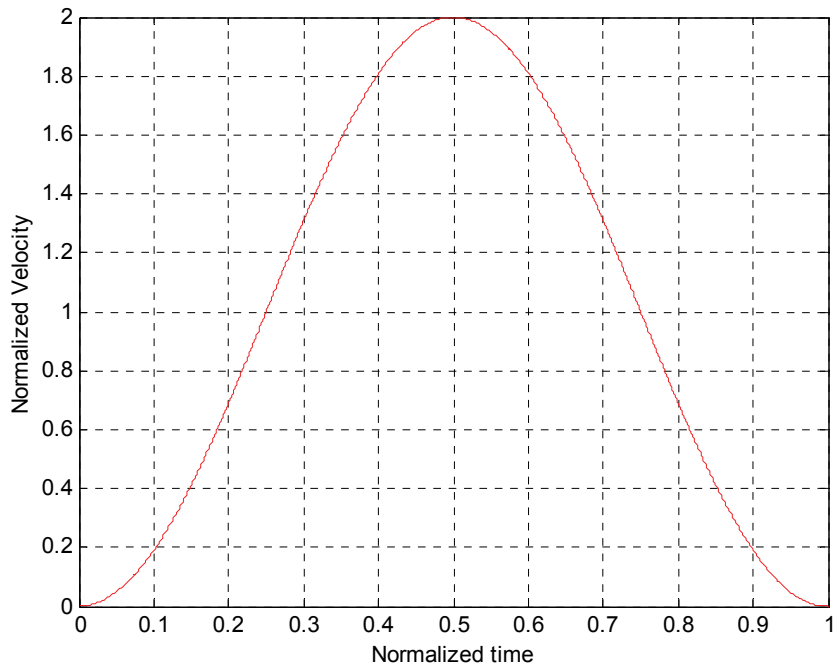


Fig. 10.2 Motion Profile using Sinusoidal function - Velocity

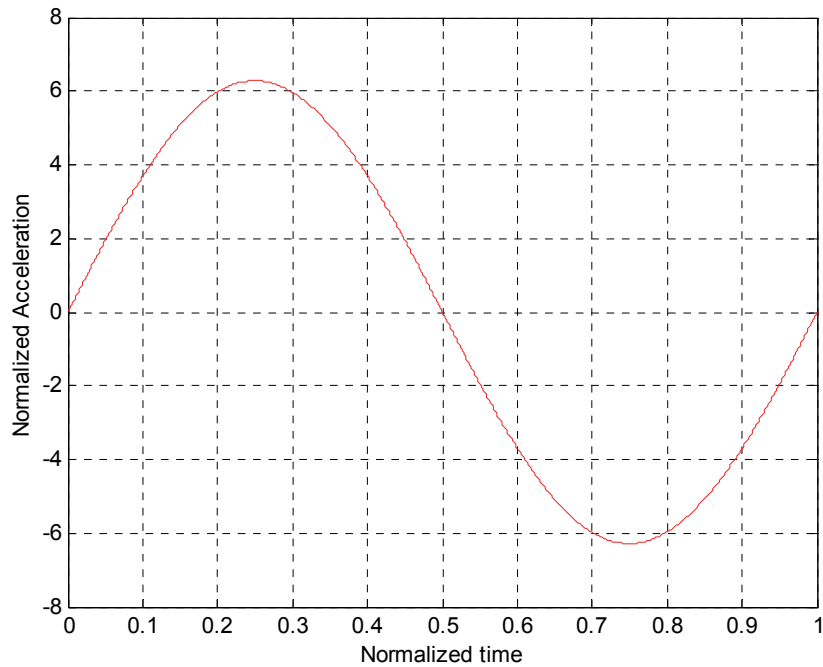


Fig. 10.3 Motion Profile using Sinusoidal function - Acceleration

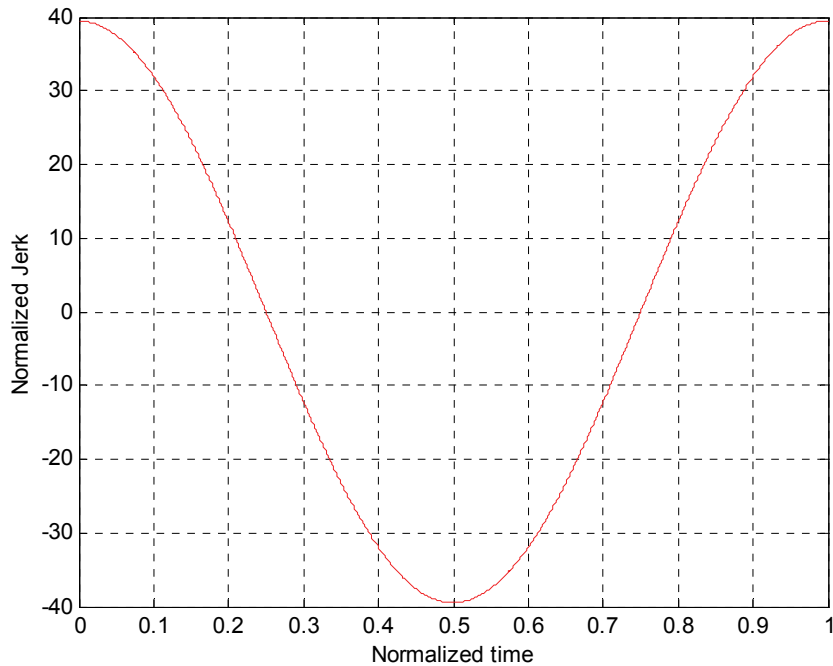


Fig. 10.4 Motion Profile using Sinusoidal function - Jerk

Fig. 10.4의 저크(Jerk) 프로파일에서 볼 수 있듯이, 유도된 저크 프로파일 식(10.15)을 보면 가감속시 방향에 따른 저크의 최대치가 39.5로 그 크기가 \pm 방향으로 균형이 잡혀 있어, 단순히 대수식을 이용한 7차식의 프로파일보다 저크에 의한 최소시간 면에서 다소 유리하다. 저크의 최대값이 \pm 방향으로 같으면 한 구동 모션 안에서 저크의 양을 잘 분산시켜 주어 균형 잡힌 구동을 가능하게 해 준다. 하지만 기구부의 진동을 유발하는 저크 입장에서 본다면, 7차식을 이용한 프로파일은 구동의 시작과 끝 부분의 저크가 0으로 시작 및 마감함으로써 정현파의 프로파일보다 보다 더 부드러운 구동 프로파일임을 알 수 있다. 다음의 Matlab 프로그램은 정현파를 이용한 구동 프로파일의 거리에 따른 시간 계산을 생성, 도시해 준다.

Matlab Source 10.2

```
% SIN wave motion time calculator
% Number of Table cell is 2048
% 2000. HanKim
clear;
```

```
MA=input('\n\n Enter the maximum acceleration(m/s^2): ');
MV=input('\n\n Enter the maximum velocity(mm/s): ');
MJ=input('\n\n Enter the maximum jerk(km/s^3): ');

index=1;
flag=0;
cstep=100;
final_dist=300000;
fx=(1:cstep:final_dist)';

for x=1:cstep:final_dist,
    Tv=(2.0*x)/MV;
    Ta=2.506628*sqrt(x/MA);
    Tj=(39.4784*x/MJ)^(1/3);

    if Tv >= Ta
        flag = 1;
        temp=Tv;
    else
        flag=2;
        temp=Ta;
    end

    if Tj >= temp
        flag = 3;
        TF=Tj;
    else
        TF=temp;
    end

    Svel(index) = 2.0*x/TF;
    Sacc(index) = 2*pi*x/TF^2;
    Sjerk(index) = 4*(pi^2)*x/TF^3;
    SVtime(index)=TF;
    index = index + 1;
end
```



```
figure(1);plot(fx,SVtime,'b-');
grid on;title('Working Time');
xlabel('distance um');ylabel('time ms');
```

```
figure(2);plot(fx,Svel,'b-');
grid on;title('Max Velocity variation with distance');
xlabel('distance um');ylabel('mm/s');
```

```
figure(3);plot(fx,Sacc,'b-');
grid on;title('Max Acc variation with distance');
xlabel('distance um');ylabel('m/s^2');
```

```
figure(4);plot(fx,Sjerk,'b-');
grid on;title('Max Jerk variation with distance');
xlabel('distance um');ylabel('km/s^3');
```

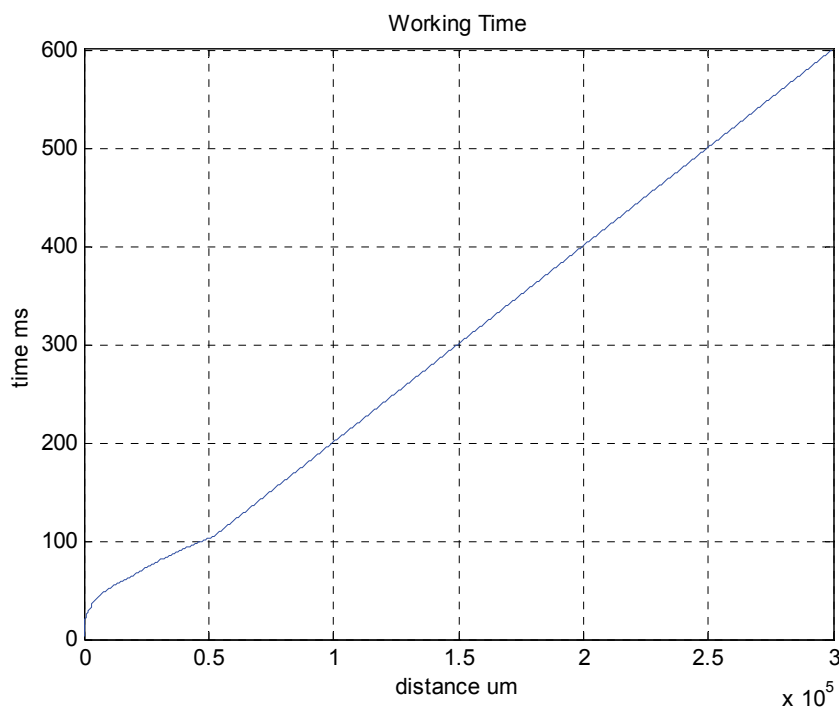


Fig. 10.5 Motion time by Sinusoidal Motion Profile,
 $(V_{\max}=1000\text{mm/s}, A_{\max}=30\text{m/s}^2, J_{\max}=3\text{km/s}^3)$

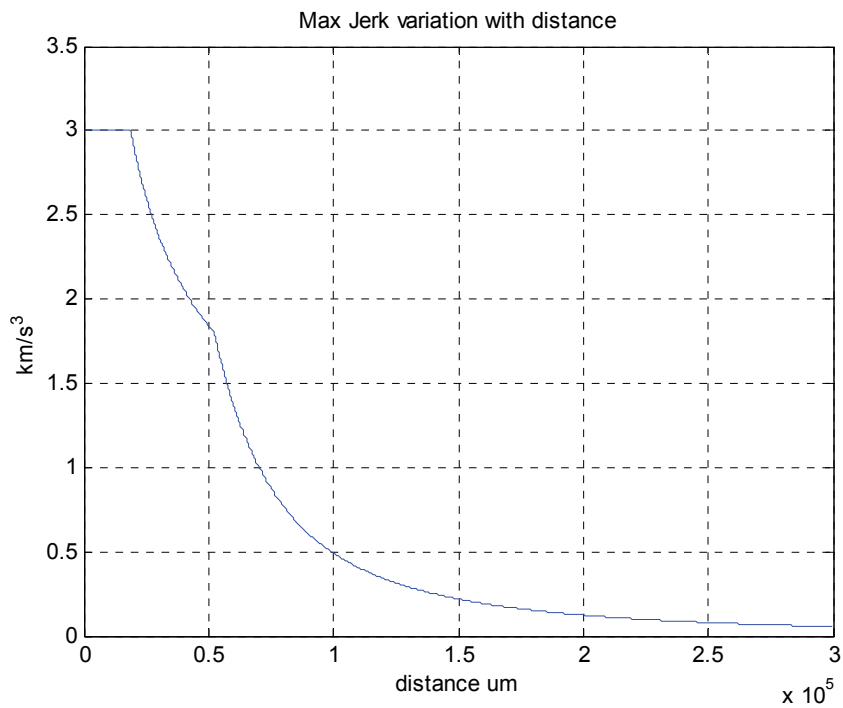


Fig. 10.6 Max Jerk Variation with Motion Distance by Sinusoidal Motion Profile,
($V_{\max}=1000\text{mm/s}$, $A_{\max}=30\text{m/s}^2$, $J_{\max}=3\text{km/s}^3$)

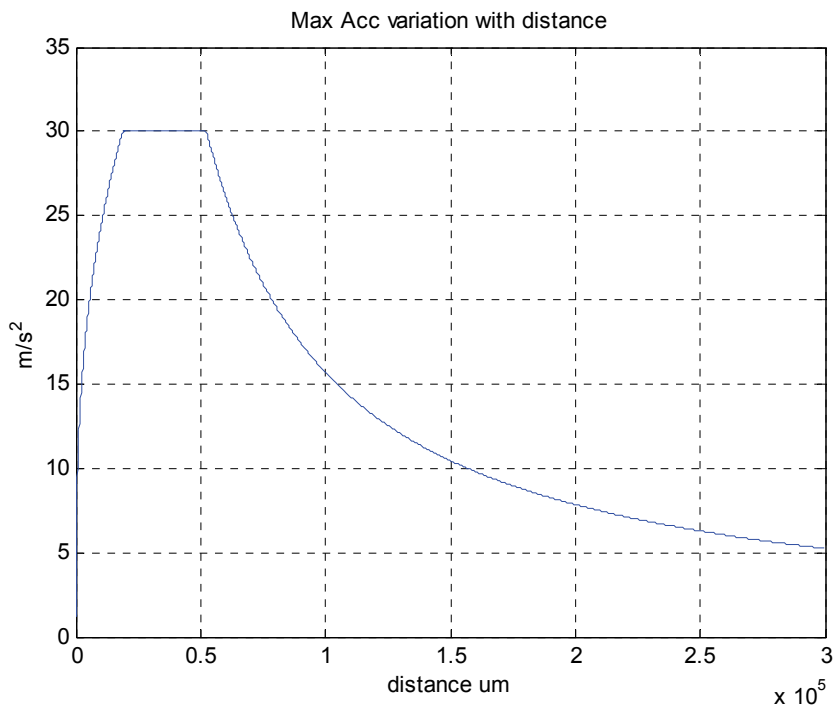


Fig. 10.7 Max Acc. Variation with Motion Distance by Sinusoidal Motion Profile,
($V_{\max}=1000\text{mm/s}$, $A_{\max}=30\text{m/s}^2$, $J_{\max}=3\text{km/s}^3$)

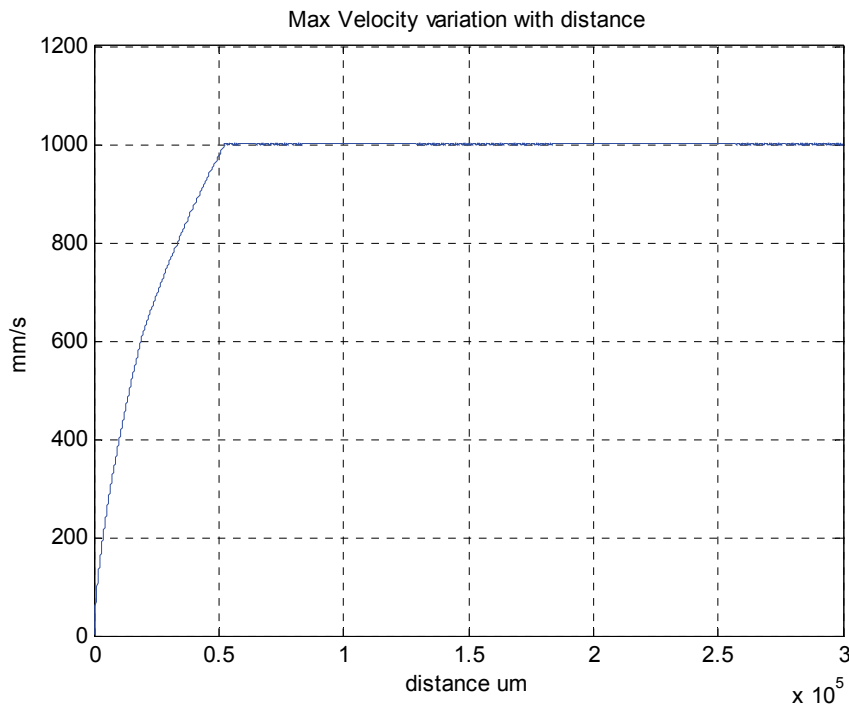


Fig. 10.8 Max Vel. Variation with Motion Distance by Sinusoidal Motion Profile,
($V_{\max}=1000\text{mm/s}$, $A_{\max}=30\text{m/s}^2$, $J_{\max}=3\text{km/s}^3$)

Figure 10.5는 정현파를 이용한 구동 프로파일인 식(10.12)로 구동했을 때의 모션 시간을 계산한 테이블이다. Fig. 10.5의 구동시간과 3차방정식을 이용한 구동 프로파일의 구동시간을 비교해 보면 한눈에 사인 곡선을 이용한 모션 프로파일이 더 많은 구동 시간을 요구하는 것을 알 수 있다. 이는 가속도 및 저크 프로파일까지 고려하여 경계조건이 추가되었기 때문에 생기는 현상으로, 구동의 시작 및 끝부분의 가속도와 저크 프로파일을 매끄럽게 제어하기 위해 치러야 할 대가이기도 하다. 이렇게 구동 시간을 희생하면서까지 저크 프로파일을 부드럽게 제어하는 이유는 다음과 같다.

1. 모션의 시작과 끝난 직후의 큰 저크 변화로 인한 기구적인 진동의 감소
2. 급격한 가속도 프로파일의 변화, 즉 큰 저크 특성은 모터의 매우 빠른 전기적인 시정수 및 고성능의(전류 제어 밴드폭이 넓은) 모터 앰프를 필요로 한다. 이러한 조건이 충족되지 않을 경우 바로 구동시의 다이내믹 에러의 증가로 나타난다.

3. 급격한 저크는 기구부에 심한 충격을 주어, 소음의 증가와 기기 수명의 단축으로 이어진다.

10.2 Power Consumptions of Motion Profiles

이번 섹션에서는 앞서 유도한 3가지 구동 방정식의 가속도 프로파일의 면적을 비교하여 보자. 가속도 프로파일이 중요시 되는 이유는 가속도의 프로파일 자체가 무마찰시의 전류 파형이 되기 때문이다 (일반적으로 모터의 토크(Torque) 및 힘은 전류와 비례하며, 모터의 속도는 공급전압에 비례한다.) 각기의 프로파일에서 표준화된 시간의 반까지(가속만 고려하자) 소모되는 전류의 크기는, 3차식의 가속도 프로파일은 단순히 직선이므로, 3차식 모션 프로파일의 가속도 프로파일에서,

$$6 \times 0.5 \times 0.5 = 1.5 \quad (10.16)$$

로 구해지며, 7차 방정식과 정현파의 구동 방정식의 경우 각각 해당 가속도 프로파일을 적분하여 해를 구하면(T=1, S=1인 경우),

$$\int_0^{0.5} 420t^2 - 1680t^3 + 2100t^4 - 840t^5 dt = 2.1875 \quad (10.17)$$

$$\int_0^{0.5} 2\pi \sin(2\pi t) dt = 2 \quad (10.18)$$

와 같이 각각 구해지게 된다. 이러한 결과를 테이블로 정리하면 다음과 같다.

[Table 10.1] Power Consumption of Each Motion Profile

	Accumulated Current (Half Cycle)	Power 소비량 비 (Half Cycle)
3차 방정식 프로파일	1.5	2.25

정현파 프로파일	2	4
7차 방정식 프로파일	2.1875	4.79

만약 3가지의 구동 방정식에서 같은 구동 시간으로 구동시킨다면, 고차항의 방정식을 이용한 프로파일일수록 그 전류의 크기가 많아짐으로써, 더욱더 많은 파워를 소비한다는 것을 알 수 있다. 보다 부드러운 프로파일로 구동하면 같은 조건에서 같은 거리를 갈 때, 전류의 소모량이 더 많아진다는 것을 알 수 있다. 따라서 기구부에 전달되는 가진을 최대한 억제하고, 다이내믹 에러를 줄이기 위한 부드러운 프로파일에서는 단순한 구동 프로파일보다 더 많은 전류를 필요로 한다는 것을 알 수 있다. 공학에서의 모든 설계가 다 그렇듯이 어떠한 장점을 얻기 위해서는 반드시 희생해야 하는 부분이 있다는 것을 알 수 있다.

