Response to Non-Zero Constant Input

상수 입력(예: 중력)이 작용하는 질량-스프링-댐퍼 시스템의 응답을 정적 평형점으로 좌표를 이동하여 해석할 수 있다.

운동 방정식

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 p \tag{1}$$

좌표 이동을 적용하면:

$$(\ddot{y} - \ddot{p}) + 2\zeta\omega_n(\dot{y} - \dot{p}) + \omega_n^2(y - p) = 0 \tag{2}$$

치환

$$y' = y - p \tag{3}$$

$$p = \frac{mg}{k} \tag{4}$$

초기 조건

원래 좌표계:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

평형점 기준 좌표계:

$$y'(0) = -\frac{mg}{k}, \quad \dot{y}'(0) = 0$$

결론

정적 평형점으로 좌표를 이동하면 상수 외력 문제는 초기조건만 다른 자유감쇠 진동 문제(Zero-Input Natural Response)로 환원된다.

Final Value Theorem 적용 예시

질량-스프링-댐퍼 시스템에 상수 입력(예: 중력 mg)이 작용한다고 가정한다.

1. 전달함수

시스템의 전달함수는

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{5}$$

이다.

시간영역과 라플라스 영역의 연결

1. 시간영역 해석

질량-스프링-댐퍼 시스템에 상수 힘 $F = mg$가 작용한다고 하자. 운동 방정식은

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = mg \tag{6}$$

$t \to \infty$일 때, 감쇠가 존재하므로

$$\dot{y}(\infty) = 0, \quad \ddot{y}(\infty) = 0$$

따라서 평형 조건은

$$ky(\infty) = mg \tag{7}$$

즉,

$$y(\infty) = \frac{mg}{k} \tag{8}$$

—

2. 입력의 라플라스 변환

상수 입력 $F(t) = mg$의 라플라스 변환은

$$F(s) = \frac{mg}{s} \tag{9}$$

이다.

3. 출력의 라플라스 표현

출력 $Y(s)$는

$$Y(s) = G(s)F(s) = \frac{mg}{s(ms^2 + cs + k)} \tag{10}$$

이다.

4. 최종값 정리 적용

최종값 정리에 따라

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) \tag{11}$$

이를 대입하면:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{mg}{s(ms^2 + cs + k)} && (12) \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{mg}{ms^2 + cs + k} && (13) \\ &= \frac{mg}{k} && (14) \end{aligned}$$

5. 해석

- 시간영역에서: $t \to \infty$일 때 속도 $\dot{y}(t) \to 0$, 따라서 힘의 평형점에서 멈춤. - 라플라스 영역에서: 최종값 정리를 통해 동일한 결과 $y(\infty) = \frac{mg}{k}$를 얻음.