Lecture Notes: Inner Product, Hermitian Transpose, and Linear Transforms

1. Inner Product

직교 기저 $\hat{b}_i$가 주어졌을 때, 임의의 벡터 $\vec{x}$는 다음과 같이 표현된다:

$$\vec{x} = c_1\hat{b}_1 + c_2\hat{b}_2 + \cdots + c_n\hat{b}_n \tag{1}$$

내적을 취하면:

$$\langle \vec{x}, \hat{b}_i \rangle = c_1\langle \hat{b}_1, \hat{b}_i \rangle + \cdots + c_i\langle \hat{b}_i, \hat{b}_i \rangle + \cdots + c_n\langle \hat{b}_n, \hat{b}_i \rangle \tag{2}$$

직교성 때문에 $\langle \hat{b}_j, \hat{b}_i \rangle = 0$ $(j \neq i)$이므로:

$$c_i = \frac{\langle \vec{x}, \hat{b}_i \rangle}{\langle \hat{b}_i, \hat{b}_i \rangle} \tag{3}$$

의미: c_i는 벡터 $\vec{x}$가 기저 $\hat{b}_i$ 방향으로 얼마나 성분을 가지는지를 나타낸다.
—

2. Hermitian Transpose

복소수 벡터 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$에 대해 내적은

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^H \mathbf{x} \tag{4}$$

여기서 $\mathbf{y}^H$는 $\mathbf{y}$의 **켤레 전치(complex conjugate transpose)**이다.
예시 벡터:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

신호 $x(t)$가 있을 때, 특정 주파수 성분 $e^{j\omega t}$이 얼마나 포함되어 있는지 알고 싶다면:

$$\langle x(t), e^{j\omega t} \rangle = \int (e^{j\omega t})^H x(t)\, dt \tag{5}$$

$$= \int x(t) e^{-j\omega t}\, dt \tag{6}$$

$$= X(j\omega) \tag{7}$$

의미: 내적을 통해 특정 주파수 성분이 신호에 얼마나 포함되어 있는지 측정할 수 있으며, 이는 곧 푸리에 변환의 정의와 동일하다.

—

3. Two Linear Transformations

Fourier Transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{8}$$

- 주파수 축은 $j\omega$로 표현되며, 이는 s-평면의 **허수축(imaginary axis)**에 해당한다. - 입력 $e^{j\omega t}$는 LTI 시스템의 고유함수이며, 출력은 $H(j\omega)e^{j\omega t}$로 나타난다.

—

Laplace Transform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{9}$$

- 라플라스 변환은 $s = \sigma + j\omega$로 정의되어, 복소평면 전체에서 해석된다. - 푸리에 변환은 라플라스 변환의 특수한 경우로, $s = j\omega$일 때 얻어진다.

—

비교

- 푸리에 변환: 허수축($j\omega$)에서의 해석 → 주파수 응답을 제공 - 라플라스 변환: 전체 s-평면에서 해석 → 안정성, 수렴성, 일반화된 시스템 분석 가능