Fourier Transform과 LTI 시스템

1. 정의

푸리에 변환은 임펄스 응답 $h(t)$를 주파수 영역으로 변환한다:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau \tag{1}$$

여기서 - $h(t)$: 시스템의 임펄스 응답 (Impulse Response) - $H(j\omega)$: 시스템의 주파수 응답 (Frequency Response)

—

2. LTI 시스템의 고유함수

복소 지수 입력을 고려하자:

$$x(t) = e^{j\omega t} \tag{2}$$

이를 LTI 시스템에 통과시키면 출력은

$$y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} \tag{3}$$

즉, - 입력 $e^{j\omega t}$는 **고유함수(eigenfunction)** - 출력은 같은 형태의 함수에 **고유값(eigenvalue)** $H(j\omega)$가 곱해진 것

—

3. 주파수 응답의 성분

주파수 응답은 크기와 위상으로 표현할 수 있다:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} \tag{4}$$

따라서 출력은

$$y(t) = |H(j\omega)| e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))} \tag{5}$$

- $|H(j\omega)|$: 입력 신호의 크기를 조절하는 비율 - $\angle H(j\omega)$: 입력 신호의 위상을 이동시키는 값

—

4. 해석

- 복소 지수 함수는 LTI 시스템의 고유함수이다. - 시스템의 주파수 응답 $H(j\omega)$는 해당 주파수에서의 **크기 변화와 위상 이동**을 나타낸다. - 따라서 푸리에 변환은 임펄스 응답 $h(t)$와 시스템의 주파수 특성을 연결하는 핵심 도구이다.